Géométrie dans l'espace

Fiche méthode

1. Les vecteurs de l'espace

L'espace est muni d'un repère.

Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple : Soient $\vec{u}$(1;2;3) et $\vec{v}$(-2;-4;-6). On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Comment montrer que deux vecteurs ne sont pas colinéaires ?

Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit de montrer que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exemple : Soient $\vec{u}$(1;2;3) et $\vec{v}$(3;4;6). On remarque que $\frac{3}{1} \neq \frac{4}{2}$, donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles, et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Comment montrer que trois vecteurs sont coplanaires ?

Pour montrer que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il suffit de montrer :
on vérifie s'il y a une paire de vecteurs colinéaires :

- si oui, ils sont coplanaires
- sinon, on regarde s'il existe 2 réels a et b tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$
  Pour cela on résout un système à 2 inconnues (a et b) et 3 équations.
  On cherche a et b dans 2 équations et on vérifie dans la 3ème équation.
  - → si on trouve un couple de solutions, alors les 3 vecteurs sont coplanaires
  - → si le système n'a pas de solution, alors les 3 vecteurs ne sont pas coplanaires

Exemple : Voir l'exemple suivant

Comment montrer que quatre points sont coplanaires ?

Pour vérifier si 4 points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple : Les points A(-4;5:-1), B(-1;5;-4), C(-2;12;4) et D(4;12;-2) sont-ils coplanaires ?

Les coordonnées des vecteurs sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}8\\7\\-1\end{pmatrix}$

On remarque qu'aucun couple de vecteurs n'est colinéaire (évident à cause du "0" et des "7")

On cherche s'il existe a et b tels que a$\overrightarrow{AB}$+b$\overrightarrow{AC}$=$\overrightarrow{AD}$, c'est à dire, a$\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$+b$\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}8\\7\\-1\end{pmatrix}$, d'où le système $\begin{cases}3a + 2b = 8 & ❶\\ 7b = 7 & ❷\\ -3a + 5b = -1 & ❸\end{cases}$

On résout le système formé des ligne ❶ et ❷ : $\begin{cases}3a + 2b = 8\\ 7b = 7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = 2\\ b = 1\end{cases}$

On vérifie dans la ligne ❸ : $-3 \times 2 + 5 \times 1 = -1$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Conclusion : les points A, B, C et D sont coplanaires.

2. Représentations paramétriques de droites

L'espace est muni d'un repère.

Comment trouver la réprésentation paramétrique d'une droite ?

Pour trouver la représentation paramétrique d'une droite, il suffit de connaitre un point et un vecteur directeur de la droite, puis de les remplacer dans la formule.

Exemple : Soient A(2;-3;1) et B(4;1;1), Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

B(4;1;1) est un point de (AB) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) d'où $\begin{cases}x = 4 + 2t\\ y = 1 + 4t\\ z = 1\end{cases}$ $, avec\ t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (AB).

Comment trouver un point et un vecteur à partir de la représentation paramétrique d'une droite ?

Pour trouver un point et un vecteur à partir de la représentation paramétrique d'une droite, il suffit de regarder dans la représentation paramétrique :

- les nombres seuls donnent les coordonnées d'un point
- et ceux en facteur du paramètre donnent les coordonnées d'un vecteur directeur.

Exemple : Voici une représentation paramétrique de la droite (d) : $\begin{cases}x = 4 + 2t\\ y = 1\\ z = 3t\end{cases}$ $, avec\ t \in \mathbb{R}$.

On peut aussi écrire : $\begin{cases}x = 4 + 2t\\ y = 1 + 0t\\ z = 0 + 3t\end{cases}$ $, avec\ t \in \mathbb{R}$; et donc A(4;1;0) est un point de (d) et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d).

Remarque : Tous les vecteurs directeurs de (d) sont colinéaires à $\vec{u}$.

Comment vérifier qu'un point appartient à une droite ?

Pour vérifier qu'un point appartient à une droite, il suffit de :

- remplacer x,y,z dans la représentation paramétrique de la droite par les coordonnées du point,
- puis résoudre les 3 équations d'inconnue le paramètre.
  - $\rightarrow$ Si on trouve 3 fois la même valeur pour le paramètre alors le point appartient à la droite,
  - $\rightarrow$ sinon il n'appartient pas.

Exemple : Soient A(7;8;9) et la droite (d) : $\begin{cases}x = 3 + 2t\\ y = 5 + t\\ z = 3t\end{cases}$ $, avec\ t \in \mathbb{R}$. A appartient-il à (d) ?

On remplace A(7;8;9) dans la réprésentationparamétrique de (d) : $\begin{cases}7 = 3 + 2t & \Rightarrow t = 2\\ 8 = 5 + t & \Rightarrow t = 3\\ 9 = 3t & \Rightarrow t = 3\end{cases}$

Donc t prend 2 valeurs différentes, ce qui est impossible, donc $A \notin (d)$

3. Représentations paramétriques de plans

L'espace est muni d'un repère.

Comment trouver le réprésentation paramétrique d'un plan ?

Pour trouver la représentation paramétrique d'un plan, il suffit de connaitre un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan, puis de les remplacer dans la formule.

Exemple : Soient A(2;-3;1), B(4;1;1) et C(1;-2;2).Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et sont des vecteurs directeurs de (ABC).

De plus A(2;-3;1) est un point de (ABC). Donc $\begin{cases}x = 2 + 2t + 3t'\\ y = -3 + 4t - 3t'\\ z = 1 + 1t'\end{cases}$, avec t et $t' \in \mathbb{R}$; est une représentation paramétrique de (ABC).

Comment vérifier qu'un point appartient à un plan ?

Pour vérifier qu'un point appartient à un plan, il suffit de :

- remplacer x,y,z dans la représentation paramétrique du plan par les coordonnées du point,
- puis résoudre le système de 3 équations à deux inconnues (les 2 paramètre).
  - → Pour cela on choisit 2 équations pour trouver les valeurs des 2 paramètres,
  - → puis on vérifie dans la troisième équation.
    - → Si la vérification est vraie alors le point appartient au plan,
    - → sinon il n'appartient pas.

Exemple : Soient A(7;8;9) et la droite (P) : $\begin{cases}x = 3 + 2t\\ y = 5 + t'\\ z = 3t - t'\end{cases}$, avec t et $t' \in \mathbb{R}$. A appartient-il à (P) ?

On remplace A(7;8;9) dans la réprésentationparamétrique de (P) : $\begin{cases}7 = 3 + 2t & ❶\\ 8 = 5 + t' & ❷\\ 9 = 3t - t' & ❸\end{cases}$

En prenant les lignes ❶ et ❷ : $\begin{cases}7 = 3 + 2t \Rightarrow t = 2\\ 8 = 5 + t' \Rightarrow t' = 3\end{cases}$

On vérifie dans la ligne ❸ : $3 \times 2 - 3 = 3 \neq 9$. Donc $A \notin (P)$

4. Position relative

On suppose que, pour chaque droite ou plan, nous connaissons une représentation paramétrique.

Comment montrer que 2 droites sont parallèles ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, il suffit de :

- trouver $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de (d_1), à partir de sa représentation paramétrique,
- trouver $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de (d_2), à partir de sa représentation paramétrique,
- montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

Remarque : Si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Comment montrer que 2 droites sont confondues ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont confondues, il suffit de :

- montrer que (d_1) et (d_2) sont parallèles,
- trouver un point A_1 de (d_1) à partir de sa représentation paramétrique,
- vérifier que A_1 appartient à (d_2).

Comment montrer que 2 droites sont sécantes ?

Pour montrer que 2 droites (d_1): $\begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$; et (d_2) : $\begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$; sont sécantes (souvent, on vérifie d'abord qu'elles ne sont pas parallèles), il suffit de :

- poser le système : $\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases}$; d'inconnues les paramètres t_1 et t_2,
- trouver, à partir de 2 lignes du système, des valeurs pour t_1 et t_2,
- vérifier si les valeurs trouvées de t_1 et t_2 sont solutions de la 3ème ligne du système:
  - $\rightarrow$ Si OUI, alors les droites sont sécantes,
  - $\rightarrow$ sinon les droites ne sont pas sécantes.

Remarque : pour trouver les coordonnées du point d'intersection, il suffit de remplacer t_1 (ou t_2) dans la représentation paramétrique de (d_1) (ou (d_2)).

Comment montrer que 2 droites sont non coplanaires ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires, il suffit de :

- montrer que (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles,
- montrer que (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes,

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

Pour étudier la position relative de la droite (d) et du plan (P), il suffit de :

- trouver, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs directeurs de P à partir de sa représentation paramétrique,
- trouver $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d), à partir de sa représentation paramétrique.
  - $\rightarrow$ Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, alors (P) et (d) sont sécants.
  - $\rightarrow$ Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors (P) et (d) sont parallèles ;
    - $\rightarrow$ et, si un point A de (d) appartient au plan (P), alors (d) est contenue dans (P).

Remarque : Pour trouver les coordonnées du pint d'intersection de (P) et (d), il faut résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues (les 2 paramètres de (P) et le paramètre de (d)).