Géométrie dans l'espace

Fiche méthode 3 : position relative

On suppose que, pour chaque droite ou plan, nous connaissons une représentation paramétrique.

Comment montrer que 2 droites sont parallèles ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, il suffit de :

- trouver $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de (d_1), à partir de sa représentation paramétrique,
- trouver $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de (d_2), à partir de sa représentation paramétrique,
- montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

Remarque : Si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Comment montrer que 2 droites sont confondues ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont confondues, il suffit de :

- montrer que (d_1) et (d_2) sont parallèles,
- trouver un point A_1 de (d_1) à partir de sa représentation paramétrique,
- vérifier que A_1 appartient à (d_2).

Comment montrer que 2 droites sont sécantes ?

Pour montrer que 2 droites (d_1): $\begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$; et (d_2) : $\begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}$; sont sécantes (souvent, on vérifie d'abord qu'elles ne sont pas parallèles), il suffit de :

- poser le système : $\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases}$; d'inconnues les paramètres t_1 et t_2,
- trouver, à partir de 2 lignes du système, des valeurs pour t_1 et t_2,
- vérifier si les valeurs trouvées de t_1 et t_2 sont solutions de la 3ème ligne du système:
  - $\rightarrow$ Si OUI, alors les droites sont sécantes,
  - $\rightarrow$ sinon les droites ne sont pas sécantes.

Remarque : pour trouver les coordonnées du point d'intersection, il suffit de remplacer t_1 (ou t_2) dans la représentation paramétrique de (d_1) (ou (d_2)).

Comment montrer que 2 droites sont non coplanaires ?

Pour montrer que 2 droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires, il suffit de :

- montrer que (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles,
- montrer que (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes,

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

Pour étudier la position relative de la droite (d) et du plan (P), il suffit de :

- trouver, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs directeurs de P à partir de sa représentation paramétrique,
- trouver $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d), à partir de sa représentation paramétrique.
  - $\rightarrow$ Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, alors (P) et (d) sont sécants.
  - $\rightarrow$ Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors (P) et (d) sont parallèles ;
    - $\rightarrow$ et, si un point A de (d) appartient au plan (P), alors (d) est contenue dans (P).

Remarque : Pour trouver les coordonnées du pint d'intersection de (P) et (d), il faut résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues (les 2 paramètres de (P) et le paramètre de (d)).