Géométrie dans l'espace

Fiche méthode 1 : les vecteurs

Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple : Soient $\vec{u}$(1;2;3) et $\vec{v}$(-2;-4;-6). On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Comment montrer que deux vecteurs ne sont pas colinéaires ?

Pour montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit de montrer que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exemple : Soient $\vec{u}$(1;2;3) et $\vec{v}$(3;4;6). On remarque que $\frac{3}{1} \neq \frac{4}{2}$, donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles, et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Comment montrer que trois vecteurs sont coplanaires ?

Pour montrer que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il suffit de montrer :
on vérifie s'il y a une paire de vecteurs colinéaires :

- si oui, ils sont coplanaires
- sinon, on regarde s'il existe 2 réels a et b tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$
  Pour cela on résout un système à 2 inconnues (a et b) et 3 équations.
  On cherche a et b dans 2 équations et on vérifie dans la 3ème équation.
  - $\rightarrow$ si on trouve un couple de solutions, alors les 3 vecteurs sont coplanaires
  - $\rightarrow$ si le système n'a pas de solution, alors les 3 vecteurs ne sont pas coplanaires

Exemple : **Voir l'exemple suivant**

Comment montrer que quatre points sont coplanaires ?

Pour vérifier si 4 points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple : Les points A(-4;5:-1), B(-1;5;-4), C(-2;12;4) et D(4;12;-2) sont-ils coplanaires ?

Les coordonnées des vecteurs sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}8\\7\\-1\end{pmatrix}$

On remarque qu'aucun couple de vecteurs n'est colinéaire (évident à cause du "0" et des "7")

On cherche s'il existe a et b tels que a$\overrightarrow{AB}$+b$\overrightarrow{AC}$=$\overrightarrow{AD}$, c'est à dire, a$\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$+b$\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}8\\7\\-1\end{pmatrix}$, d'où le système $\begin{cases} 3a+2b=8 & ❶ \\ 7b=7 & ❷ \\ -3a+5b=-1 & ❸ \end{cases}$

On résout le système formé des ligne ❶ et ❷ : $\begin{cases} 3a+2b=8 \\ 7b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

On vérifie dans la ligne ❸ : $-3\times 2+5\times 1=-1$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Conclusion : les points A, B, C et D sont coplanaires.