EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 7(x-1)$	**c.** $y = 7x + 7$
b. $y = x - 1$	**d.** $y = x + 1$

Question 2 :

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$	**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$	**d.** On ne peut pas la déterminer

Question 3 :

Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouges ?

a. $0{,}1662$	**c.** $0{,}1115$
b. $0{,}4$	**d.** $0{,}8886$

Question 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - x$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$	**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	**d.** On ne peut pas déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0{,}95)$
Montrer que f est décroissante sur $[20;\ +\infty[$.

2. On rappelle $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[20;\ +\infty[$.
Donner un encadrement à $0{,}1$ près de cette solution.

4. En déduire le signe de f sur $[20;\ +\infty[$.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait $10\,560$ panneaux solaires. On observe, chaque année, que $2\,\%$ des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 12500 - 500\,\mathrm{e}^{-0{,}02x+1{,}4}$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera $12\,000$.

EXERCICE B - **Équation différentielle**

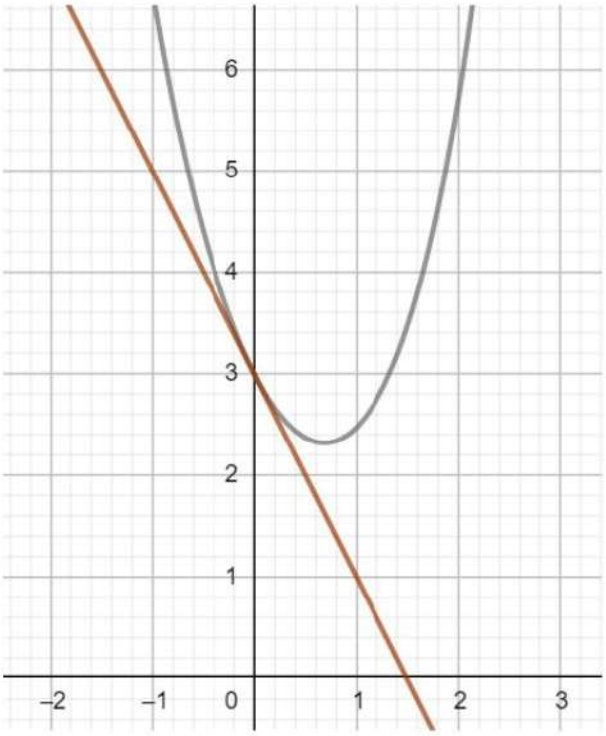
Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :
   (E) : $y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$
   a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$$
   est solution de l'équation (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

<u>Partie B</u> : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$e^{2x} - e^{x} - 2 = (e^{x} - 2)(e^{x} + 1)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $e^{x} - 2 > 0$.
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.