Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\,e^{2x}\,(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

b. est monotone sur $]0\,;+\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

d. e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\,;+\infty[$

b. est convexe sur $]0\,;+\infty[$

c. est concave sur $]0\,;\frac{1}{2}]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x).$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.