**EXERCICE au choix du candidat (5 points)**

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.**

**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**

**Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.**

## Exercice A

| |
|---|
| ***Principaux domaines abordés :*** |
| ***Fonction logarithme ; dérivation.*** |

### Partie I

On désigne par $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction $h$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note $h'$ sa fonction dérivée.

**1.** Déterminez les limites de $h$ en 0 et en $+\infty$.

**2.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ de $]0;+\infty[$ , $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

**3.** En déduire les variations de la fonction $h$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

**4.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

**5.** Déterminer le signe de $h(x)$ pour $x$ appartenant à $]0;+\infty[$.

### Partie II

On désigne par $f_1$ et $f_2$ les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2} \quad .$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de $f_1$ et $f_2$ dans un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

**1.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

**2.** Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
On rappelle que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

**Exercice B**

| |
|---|
| ***Principaux domaines abordés :*** <br><br> ***Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité.*** |

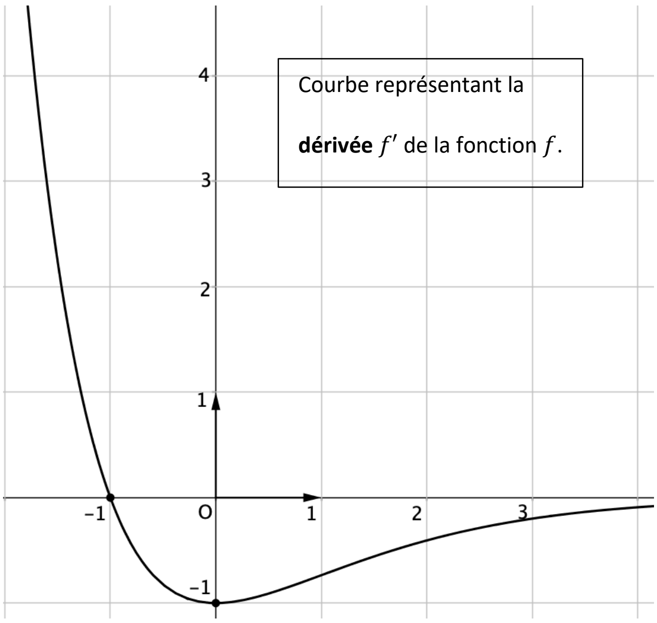
## PARTIE I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** $f'$ d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

**1.** Le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** La convexité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.




## PARTIE II

On admet que la fonction $f$ mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}\ .$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note $f'$ et $f''$ les fonctions dérivées première et seconde de $f$ respectivement.

**1.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ ,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{-x}\ .$$

En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ .

**2.**

**a.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

**b.** Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.

**c.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à $10^{-1}$ près.

**3.** Déterminer, pour tout nombre réel $x$, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction $f$. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?