Exercice au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
• **Fonction exponentielle** • **Convexité**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -2 + (3 - x)\mathrm{e}^{x}$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + \frac{3}{x} = 0$.

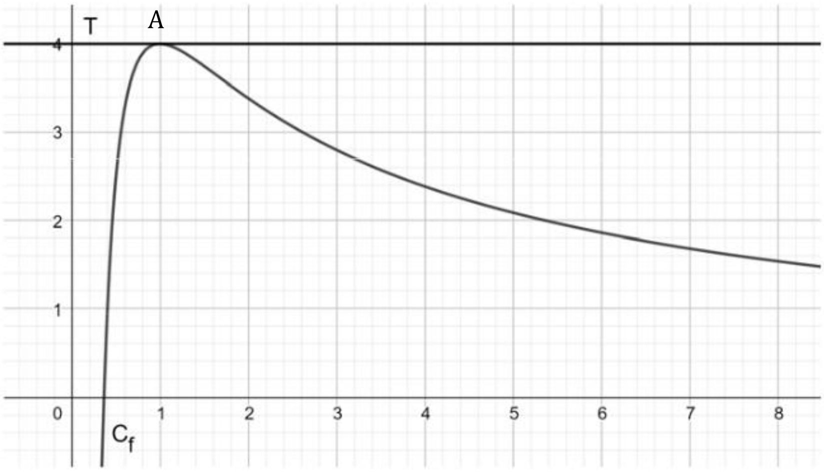
Affirmation 4 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur **R** par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^{x}$ est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
• **Fonction logarithme népérien**   • **Convexité**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.