EXERCICE au choix du candidat (5 points)

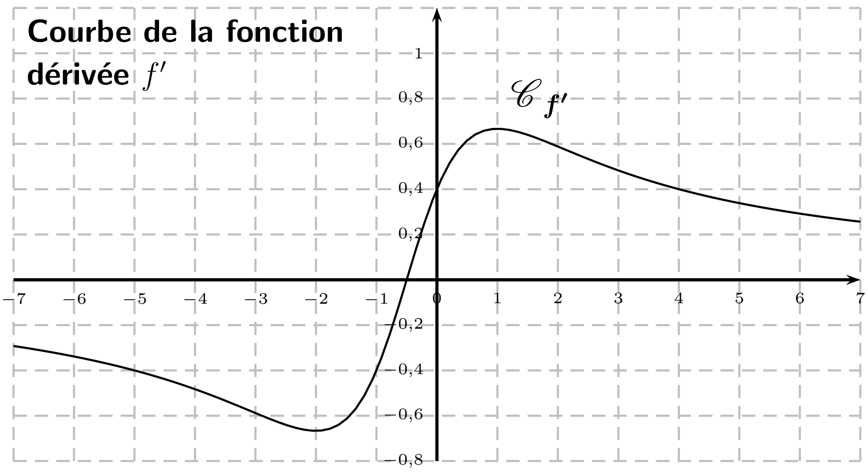
Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés
— convexité
— fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés

— Étude de fonction, fonction exponentielle

— Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $p(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}4t}}$.

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, $10\,\%$ des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3(b) ainsi que la valeur $p(0)$.