Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.

On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice B

Principaux domaines abordés :   ***Fonction logarithme ; convexité.***

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.

a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f, c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.