EXERCICE au choix du candidat (5 points)

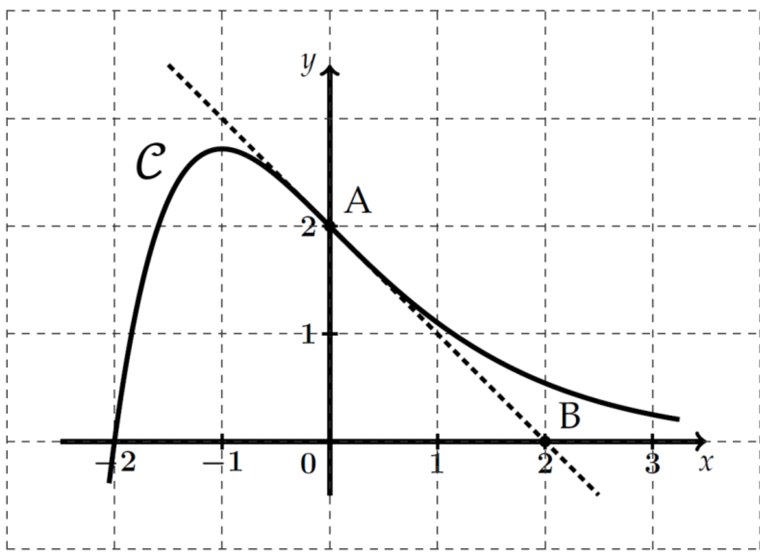
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur **R** :



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle $y' = -y + \mathrm{e}^{-x}$.

On admet que $g: x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

2. En déduire toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E).

3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

- **a.** Montrer que pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
- **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in$ **R** et dresser le tableau des variations de f sur **R**.

  On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

  On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur **R**.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

- **a.** Calculer pour tout $x \in$ **R**, $f''(x)$.
- **b.** Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$?

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation.

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3.

a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.