Exercice 1 (7 points) — Thème : Fonction logarithme

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1- On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbf{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a- n'admet aucune solution.
b- admet exactement une solution.
c- admet exactement deux solutions.
d- admet une infinité de solutions.

2- Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

a- La fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$.
b- La fonction g est concave sur $]0, +\infty[$.
c- La courbe C_g admet exactement un point d'inflexion sur $]0, +\infty[$.
d- La courbe C_g admet exactement deux points d'inflexion sur $]0, +\infty[$.

3- On considère la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1; 1[$ par :

a- $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$
b- $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
c- $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$
d- $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln(1 - x^2)$

4- La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

a- $]-3; 2[$
b- $]-\infty; 6]$
c- $]0; +\infty[$
d- $]2; +\infty[$

5- On considère la fonction f définie sur $]0,5\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a- $y = 4x - 7$
b- $y = 2x - 4$
c- $y = -3(x - 1) + 4$
d- $y = 2x - 1$

6- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions dans $\mathbf{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a- $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$
b- $\mathcal{S} =]1; +\infty[$
c- $\mathcal{S} = \emptyset$
d- $\mathcal{S} =]-1; 1[$

Exercice 3 (7 points) Thèmes : Fonction exponentielle et suite

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1- Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2- Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3- En déduire que :
si a et b sont deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $h(a) - h(b) \leqslant 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1- Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.