

Exercice n°1 (7 points)**Thème : Fonction exponentielle**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1- Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

On suppose que f est dérivable sur \mathbf{R} et on note f' sa fonction dérivée.

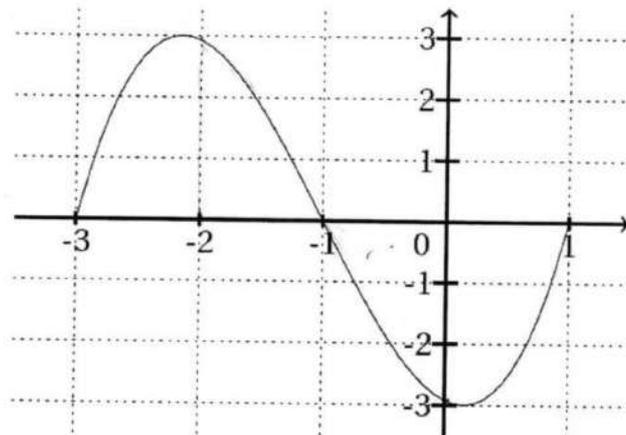
a- $f'(x) = e^{-x}$

b- $f'(x) = xe^{-x}$

c- $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

d- $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

2- Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f'' .



On peut alors affirmer que :

a- La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1; 1]$

b- La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2; 0]$

c- La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2; 0]$

d- La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

3- On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

a- $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$

b- $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$

c- $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$

d- $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$

4- Que vaut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

a- -1

b- 1

c- $+\infty$

d- N'existe pas

5- On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^{2x+1}$.

La seule primitive F sur \mathbf{R} de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

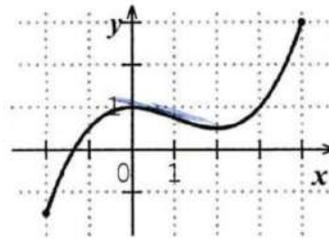
a- $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$

b- $x \mapsto e^{2x+1} - e$

c- $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$

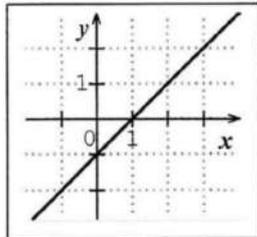
d- $x \mapsto e^{x^2+x}$

6- Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2; 4]$.

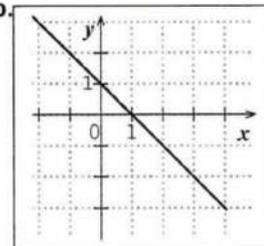


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'' , dérivée seconde de f ?

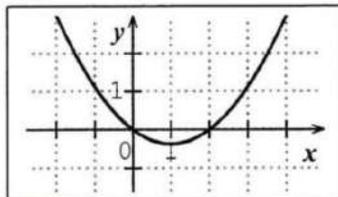
a.



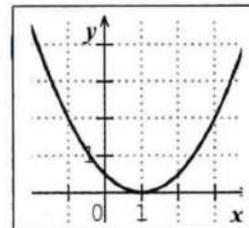
b.



c.



d.



Exercice 2 (7 points) Thèmes : Fonction logarithme et suite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1- Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

- 2- a- On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :
$$f'(x) = 1 + \ln(x)$$

b- En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
c- Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.

- 3- a- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
b- Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c- En déduire que pour tout réel x strictement positif :
$$f(x) \geq x$$

- 4- On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
b- Déduire de la question 3c la croissance de la suite (u_n) .
c- En déduire que la suite (u_n) est convergente.