EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction logarithme.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15%.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures **c.** 9 heures **d.** 13 heures

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 6$. On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) est strictement croissante.
b. la suite (u_n) est strictement décroissante.
c. la suite (u_n) n'est pas monotone.
d. la suite (u_n) est constante.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$
b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$
d. $f(2x) = 2f(x)$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \ .$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.
b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.
c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.
d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 2]$ par :

$$h(x) = x^2(1 + 2\ln(x)) \quad .$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2]$, on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)) \quad .$$

5. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois.

b. exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois.

d. exactement 3 fois.

6. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est :

a. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$

b. $y = \left(6\sqrt{\mathrm{e}}\right) \cdot x + 2\mathrm{e}$

c. $y = 6\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

d. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4\mathrm{e}$

7. Sur l'intervalle $]0\,;2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2} .$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R**. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\,; +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur **R**. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la **partie A**.

1. **a**. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 .$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a**. On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.

b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):
    u=0
    n=0
    while u<=a:
        u=1+u-exp(0.5*u-2)
        n=n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.