EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions ;
Suites.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = x^{1000} + x$.
On peut affirmer que :

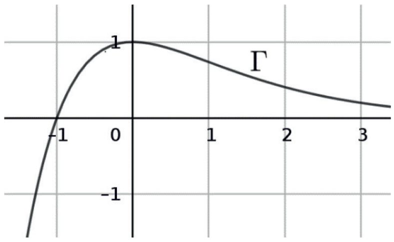
a. la fonction g est concave sur **R**.

b. la fonction g est convexe sur **R**.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur **R**. On note f' sa fonction dérivée.
On note C la courbe représentative de f .
On note Γ la courbe représentative de f' .
On a tracé ci-contre **la courbe Γ** .



On note T la tangente à **la courbe C** au point d'abscisse 0 .

On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y = x$

b. $y = 0$

c. $y = 1$

d. $x = 0$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que la suite (u_n) est :

a. majorée et non minorée.

b. minorée et non majorée.

c. bornée.

d. non majorée et non minorée.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ;   Suites.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x) \ .$$

1. Calculer la limite de f en 0.

2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x} \quad .$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;1]$.

4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

a. Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes(n):
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n):
     c=...
     b=...
     a=c
  return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur **R**.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 .$$

b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

a. Démontrer que $f(A) = 0$.

b. Déterminer $A - B$.