

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2.
 - a. On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
 - b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur \mathbb{R} .
 - c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur \mathbb{R} . Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
 - a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
 - b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.
 - a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
 - b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.
3.
 - a. Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
 - b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α , dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur \mathbb{R} ? Expliquer.