

Soit k un réel strictement positif.

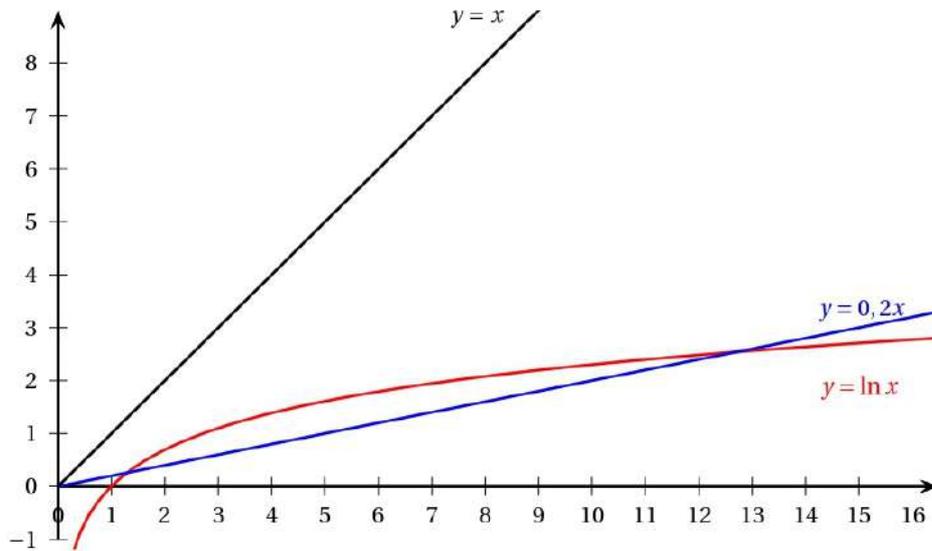
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k .

1. Conjectures graphiques :

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

On considère la fonction f , définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$-\infty$

- Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
- Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k .
- Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.
- Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.
- Donner, selon les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.