

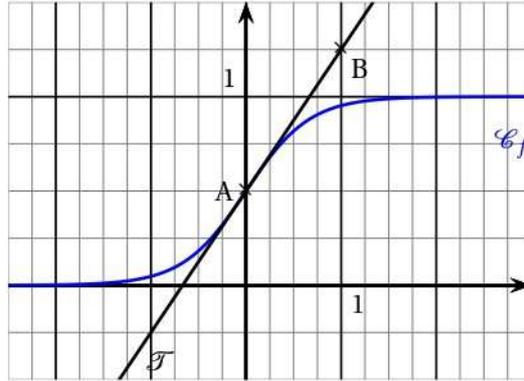
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$  et B le point de coordonnées  $\left(1; \frac{5}{4}\right)$ .

On a tracé ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{T}$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.



### Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

- Déterminer l'équation réduite de la tangente  $\mathcal{T}$ .
- Donner les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave.

### Partie B : étude de la fonction

- On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée  $f'$ .
- Justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .
  - Déterminer la limite en  $-\infty$  de la fonction  $f$ .
- Déterminer la valeur exacte de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = 0,99$ .

### Partie C : Tangente et convexité

- Déterminer par le calcul une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.  
On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ .  
On admet que  $f''$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

- Étudier le signe de la fonction  $f''$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est convexe.
  - Que représente le point A pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
  - En déduire la position relative de la tangente  $\mathcal{T}$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .  
Justifier la réponse.