

EXERCICE 4

5 points

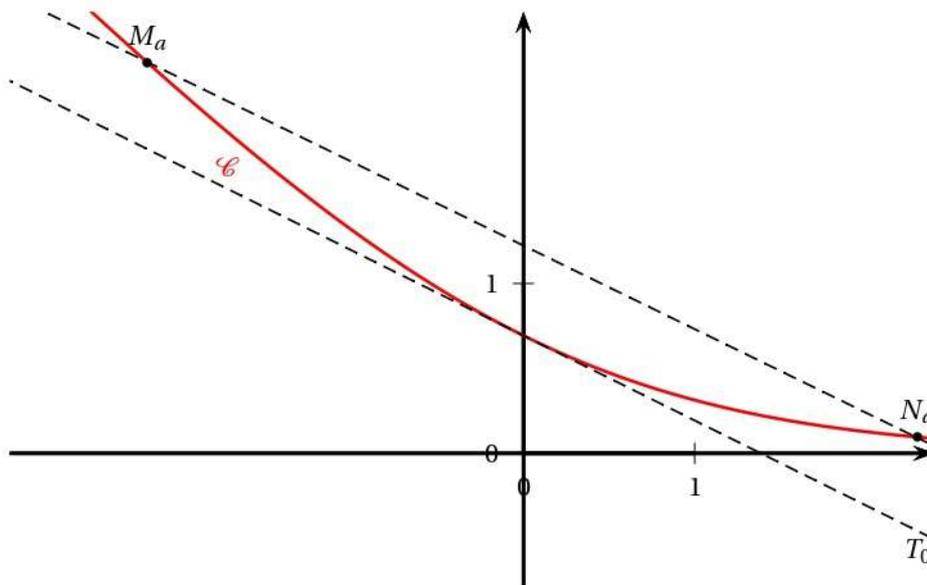
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe \mathcal{C} est tracée ci-dessous.



1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
 - c. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.
 - d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. On note T_0 la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 0.

- a. Déterminer une équation de la tangente T_0 .
- b. Montrer que la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .
- c. En déduire que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives $-a$ et a .

On a donc : $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.

- a. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
- b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.