EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

   b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F.
   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$? Justifier.
5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Quelle est la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes?

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   c. Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif :

   $$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

   .