Exercice 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

• le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,

• la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b. Montrer que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.