Exercice 4 — 5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite

dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ y & = & 1+t\\ z & = & 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).