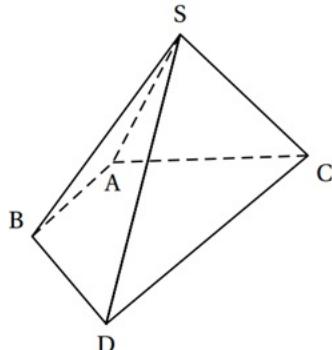


EXERCICE 2

5 POINTS

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3 ; -1 ; 1); B(4 ; -1 ; 0); C(0 ; 3 ; 2); D(4 ; 3 ; -2) et S(2 ; 1 ; 4).

Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4. a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; -1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$