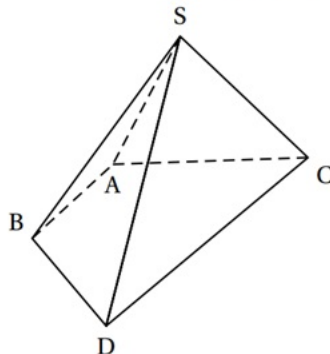


Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3; -1; 1)$; $B(4; -1; 0)$; $C(0; 3; 2)$; $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2.
 - a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
 - b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
 - d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
 Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que $SI = 2$ cm.
4.
 - a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3; 3; -1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
 - b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
 On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$