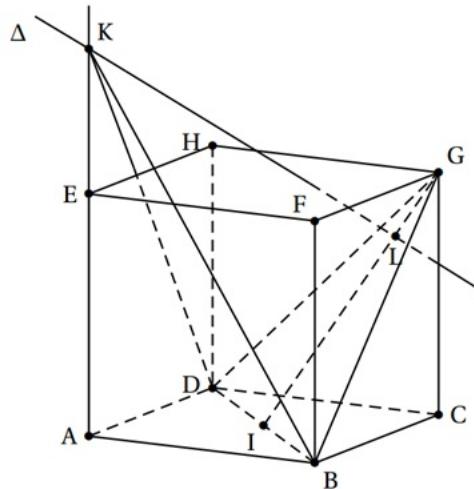


# Exercice 1

**6 points**

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que  $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. a. Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.  
Aucune justification n'est attendue.
- b. Montrer que le point L a pour coordonnées  $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$ .
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est  $x + y - z - 1 = 0$ .
3. On considère la droite  $\Delta$  perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

- a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t & \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases}$$

- b. Montrer que les droites  $\Delta$  et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées  $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$ .
- c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.
4. a. Calculer la distance KL.
- b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.  
Montrer que son aire est égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$  où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la longueur de la hauteur relative à cette base;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par  $a$  un réel appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on note  $K_a$  le point de coordonnées  $(0; 0; a)$ .
- a. Exprimer le volume  $V_a$  de la pyramide ABCDK $_a$  en fonction de  $a$ .
- b. On note  $\Delta_a$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle  $L_a$  le point d'intersection de la droite  $\Delta_a$  avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point  $L_a$  sont  $\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{2a-1}{3}\right)$ .

- c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif  $a$  tel que le tétraèdre GDBK $_a$  et la pyramide ABCDK $_a$  sont de même volume.