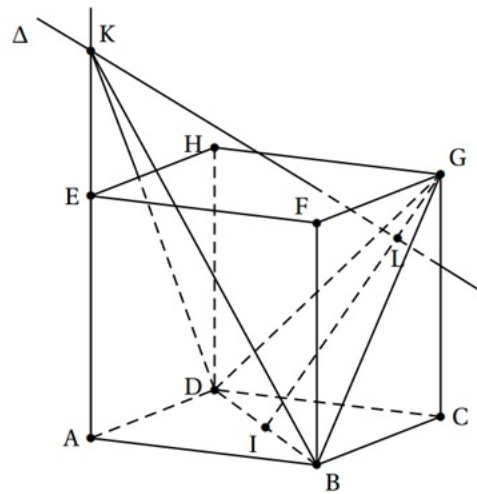


Exercice 1

6 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.
 - a. Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
Aucune justification n'est attendue.
 - b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.
3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.
 - a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

- b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.
 - c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.
4.
 - a. Calculer la distance KL.
 - b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.
Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.
On rappelle que :
 - le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base;
 - un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.
5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0; 0; a)$.
 - a. Exprimer le volume \mathcal{V}_a de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a .
 - b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{2a-1}{3}\right)$.

- c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GDBK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont de même volume.