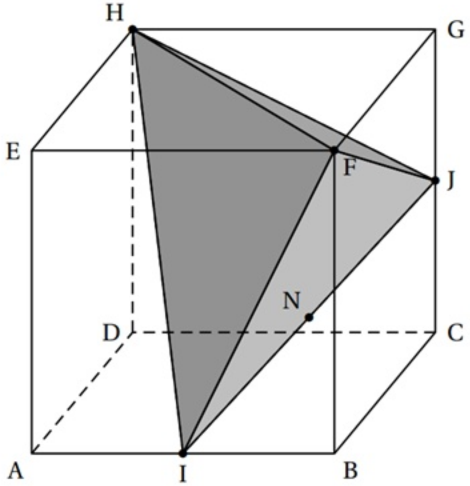
Exercice 1 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].
Le point N est le milieu du segment [IJ].

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
   En déduire les coordonnées de N.

   b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$$

   c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.
   On admet que $NF = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

   d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (FIJ).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.

   c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

   e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule
   $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
   Calculer le volume du tétraèdre HFIJ. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.