

EXERCICE 3

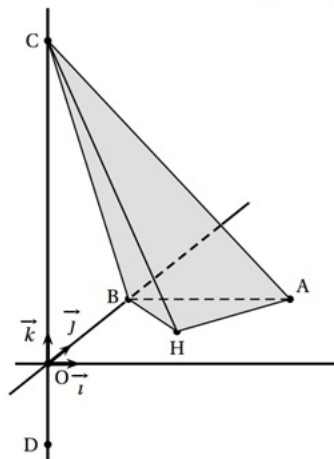
5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $D(0; 0; -\frac{5}{2})$.

1. a. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

- b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.



2. On considère la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
- a. On admet que la droite \mathcal{D} et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0)$.
- b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).
3. a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.
- b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.
4. a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.
- b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.
- On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.*
5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).