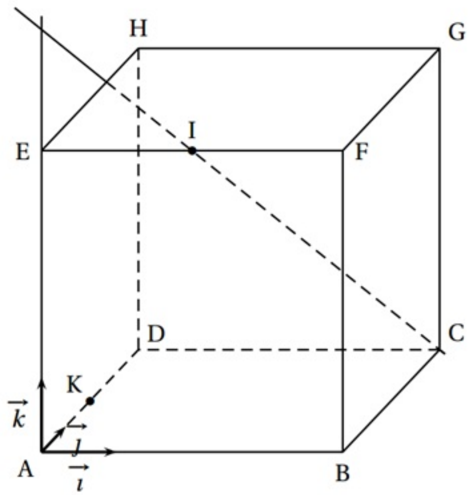
EXERCICE 1 **5 points**

On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$\mathrm{B}(4\,;0\,;0),\quad \mathrm{D}(0\,;4\,;0),\quad \mathrm{E}(0\,;0\,;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 4t\\ z &=& 4-4t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$
3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :
$$x+2y-2z-4=0.$$
   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C ?
   c. Vérifier que le point K(0 ; 2 ; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).
4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V=\dfrac{B\times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
   a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.
   b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
   c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.
   d. On note I′ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I′ C) passant par G.
   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?