

EXERCICE 2**5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points A(-1 ; 2 ; 1), B(1 ; -1 ; 2) et C(1 ; 1 ; 1);
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
 - a.** Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
- $$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$
- Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
 - a.** Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
 - b.** En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
- Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?