

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d: \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d': \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
- Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

- Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
- Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
 - En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
- Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?