

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points suivants :

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Soit  $\Delta$  la droite passant par le point D et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Démontrer que la droite  $\Delta$  est orthogonale au plan (ABC).
  - b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .
4. On appelle H le point de coordonnées  $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$ .  
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par  $V = \frac{1}{3}B \times h$ , où  $B$  est l'aire d'une base du tétraèdre et  $h$  est sa hauteur relative à cette base.
  - a. Montrer que  $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .
  - b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
6. On considère la droite  $d$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 - 2k \\ y &= -3k \\ z &= 1 + k \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite  $d$  et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?