

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont infectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les événements suivants :

- M : « la personne est malade » ;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
 - a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Déterminer la probabilité pour qu'exactly deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.