

Exercice 1

5 points

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatrics*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.

L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un évènement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et \bar{E} son évènement contraire.

Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'évènement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'évènement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2.
 - a. Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
 - c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie B

On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.

On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie C

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires A_1, A_2, \dots, A_{20} . On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}.$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20} .
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.