

## Exercice 2

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

### Partie I

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note  $C_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

1. a. On désigne par  $F_1$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :

$$F_1(x) = (x - 1)e^x$$

Vérifier que  $F_1$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

b. Calculer  $I_1$ .

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$$

3. Calculer  $I_2$ .

4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

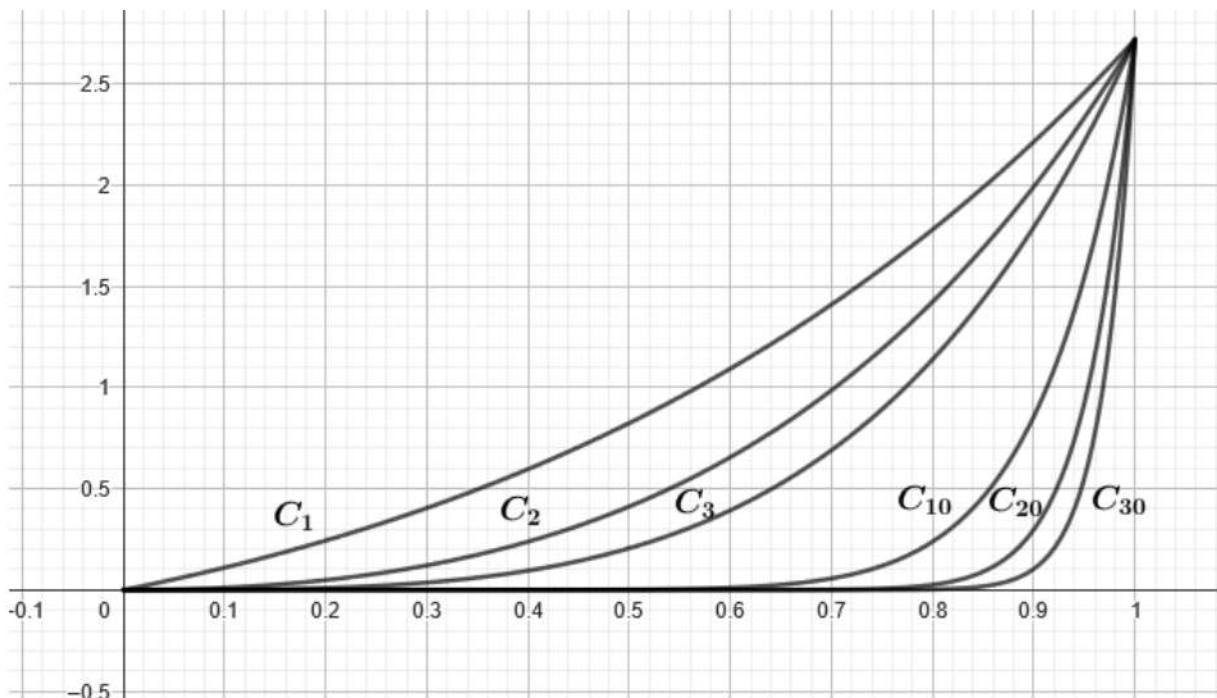
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i+1)*a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

## Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes  $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$  et  $C_{30}$ .



- a. Donner une interprétation graphique de  $I_n$ .  
 b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite  $(I_n)$  ?
2. Montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .