4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

   A. La suite (u_n) est minorée.

   B. La suite (u_n) est décroissante.

   C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :
  u=2
  n=0
  while u<45 :
    u=0.75*u+5
    n=n+1
  return n
```

   Cette fonction renvoie :

   A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$;

   B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

   C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 45$.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés
— Suites
— Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $L(t) = 20 - 19e^{-0{,}05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$. Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?