

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.