

## EXERCICE 2 (7 points)

Thème : suites

Dans cet exercice, on considère la suite  $(T_n)$  définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9.$$

1.
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n \geq 20$ .
  - b. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(T_n)$ .
  - c. Conclure de ce qui précède que la suite  $(T_n)$  est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n = T_n - 20$ .
  - a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
  - b. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$ .
  - c. Calculer la limite de la suite  $(T_n)$ .
  - d. Résoudre l'inéquation  $T_n \leq 120$  d'inconnue  $n$  entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de  $180^\circ\text{C}$  et celle de l'air ambiant de  $20^\circ\text{C}$ . La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente  $(T_n)$ . Plus précisément,  $T_n$  représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius,  $n$  minutes après sa sortie du four.
  - a. Expliquer pourquoi la limite de la suite  $(T_n)$  déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
  - b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x):  
    T=180  
    n=0  
    while T>x:  
        T=0.955*T+0.9  
        n=n+1  
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.