Exercice 3 (7 points) Thèmes : Fonction exponentielle et suite

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1- Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2- Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3- En déduire que :
si a et b sont deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $h(a) - h(b) \leqslant 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et C_f au voisinage de 0. Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et C_f de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2- Déterminer la limite de la suite (u_n).

3- a- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la partie A.

b- En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4- Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718281828
2	0,148721271
3	0,062279092
4	0,034025417
5	0,021402758
6	0,014693746
7	0,010707852
8	0,008148453
9	0,006407958
10	0,005170918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et C_f semble être inférieur à 10^{-2}.