EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2} \ .$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R**. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\,;+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur **R**. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la **partie A**.

1. **a**. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 \ .$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a**. On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

Démontrer que $\ell = 4$.

b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):
    u=0
    n=0
    while u<=a:
        u=1+u-exp(0.5*u-2)
        n=n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.