Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0{,}008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année (2021+n).

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 100] l'équation $f(x) = x$.

3.

- **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 100] et dresser son tableau de variations.
- **b.** En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$
- **c.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- **d.** Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
        n = 0
        u = 40
        while u < p :
             n = n+1
             u = 0.008*u*(200-u)
        return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question **3**.