EXERCICE 4 6 points **Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

   d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

   a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
Variations de g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$g(-2)$	$\searrow$	1

   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

   a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite v est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

   b. Soit n un entier naturel.
   Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

   c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

   d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.