

**EXERCICE 2****5 points**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 8$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer  $u_1$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
En déduire que pour tout réel  $x > 2$ , on a  $f(x) > 2$ .
  - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 2$ .
3. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

- a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. On définit la suite  $(v_n)$  pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

- a. Calculer  $v_0$ .
  - b. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4}{7}$ .
  - c. Déterminer, en justifiant, la limite de  $(v_n)$ .  
En déduire la limite de  $(u_n)$ .
5. On considère la fonction Python `seuil` ci-contre, où  $A$  est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :  
    n = 0  
    u = 8  
    while u > A :  
        u = (6*u + 2)/(u + 5)  
        n = n + 1  
    return n
```