

EXERCICE 2**5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2x e^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1.
 - a. Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
 - b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = 2(1 - x) e^{-x}.$$

- c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.
4.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $\ln(2) - u_n$ est positif.
 - b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    u = 0.1  
    while ln(2) - u ... 0.0001 :  
        n = n+1  
        u = ...  
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction `seuil ()`.