

Soit  $a$  un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 1$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  pour différentes valeurs du nombre réel  $a$ .

### Partie A : étude de la suite $(u_n)$ dans le cas $1 < a < 2$

1.
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$ .
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
  - a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n < 2$ .
  - b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction  $u$  écrite en langage Python.  
Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit  $u(2, 1)$  et  $u(2, 2)$  dans la console Python.
2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite  $(u_n)$  dans le cas où  $a = 2$ ?  
On admettra ce résultat sans démonstration.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

### Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \ln(u_n - 1)$ .

- a.** Montrer que la suite  $(\nu_n)$  est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de  $a$ .
  - b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln(a-1)}$ .
- 2.** Déterminer, suivant les valeurs du réel  $a$  strictement supérieur à 1, la limite de la suite  $(u_n)$ .