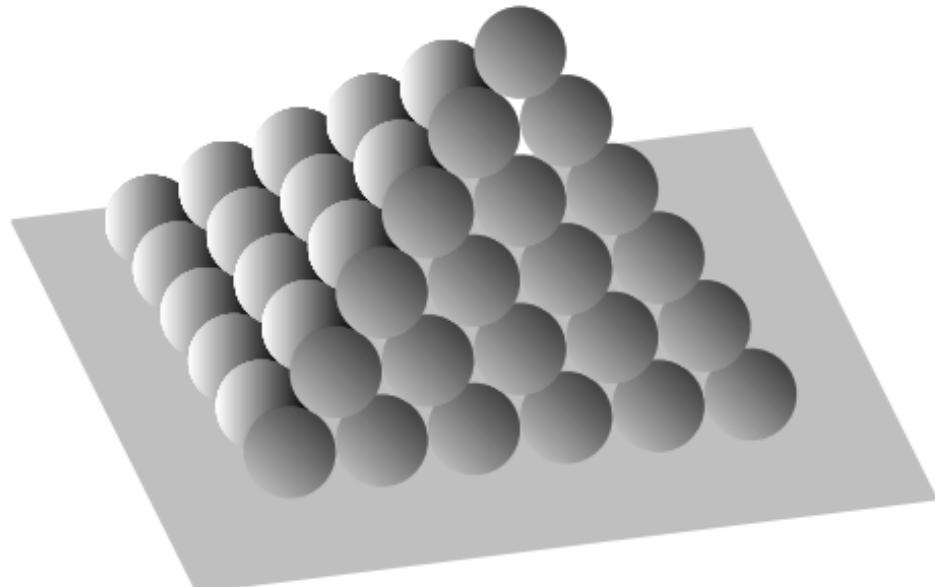


### Exercice 3

**4 points**

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1<sup>er</sup> étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2<sup>e</sup> étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3<sup>e</sup> étage possède 9 boules;
- ...
- le  $n$ -ième étage possède  $n^2$  boules.



Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $u_n$  le nombre de boules qui composent le  $n$ -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi,  $u_n = n^2$ .

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

- a. Calculer  $S_5$  et interpréter ce résultat.
- b. On considère la fonction pyramide ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de  $n$  étages.

```
def pyramide(n) :  
    S = 0  
    for i in range(1, n+1) :  
        S = ...  
    return ...
```

- c. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

- d. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible?