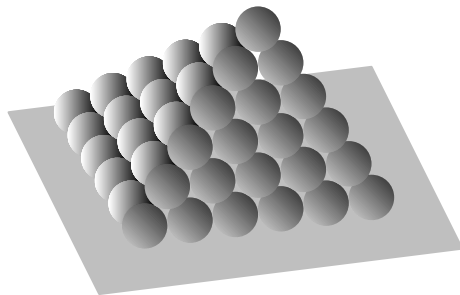


Exercice 3

4 points

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1^{er} étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2^e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3^e étage possède 9 boules;
- ...
- le n -ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

- a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
- b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :  
    S = 0  
    for i in range(1, n+1) :  
        S = ...  
    return ...
```

- c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

- d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible?