Exercice 3 **6 points**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

   b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u − log( u / 4 )
    return S
```

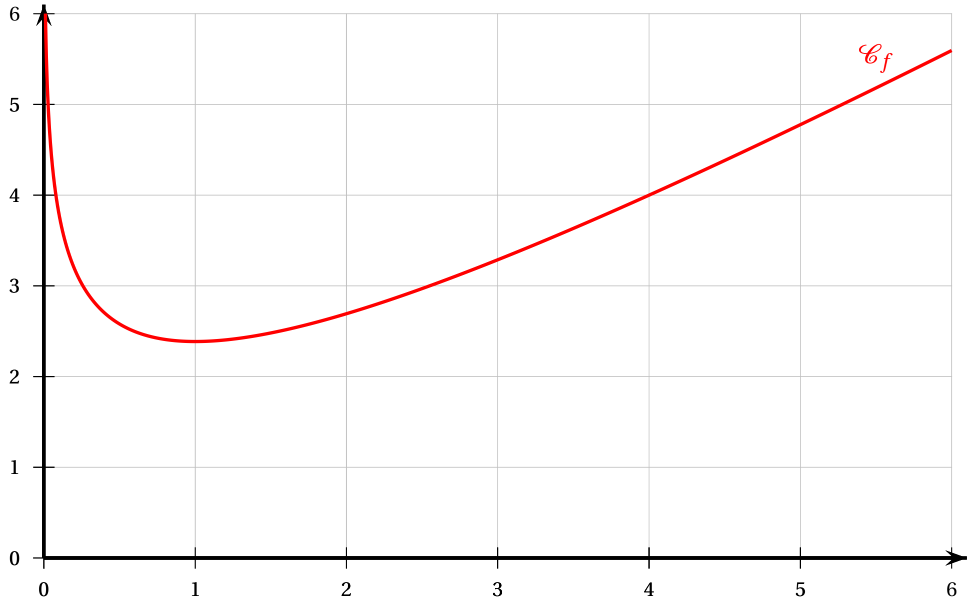
   L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

   c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. *Les limites ne sont pas demandées.*

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.

On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.