

EXERCICE 2**5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1 .
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- a. Calculer a_0 et a_1 .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n - 1$$

- d. En déduire la limite de la suite (a_n) .
3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1 def algo(p):  
2     u=2  
3     n=0  
4     while u-1>p:  
5         u=(2*u+1)/(u+2)  
6         n=n+1  
7     return (n,u)
```

- a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
- b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.