

EXERCICE 2

5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```

1  def suite(n) :
2      U=30
3      W=45
4      for i in range (1,n+1) :
5          U=U/2+10
6          W=W/2+U/2+7
7      return W

```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. **a.** Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

- b.** On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?