

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1

5 points

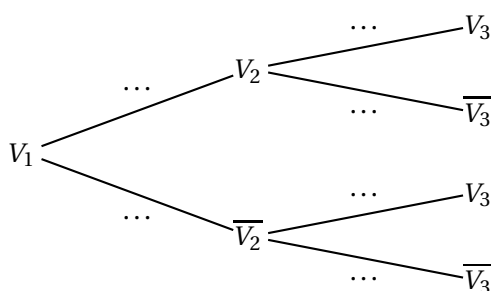
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
 Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
 Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
 Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).
 La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
 Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 1 fg;
- \overline{V}_n l'évènement : la n -ième machine détient la valeur 0 fg.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



- b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.

La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

- b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

- c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.