Démonstration par récurrence

Fiche méthode : usage et rédaction

Quand utiliser une démonstration par récurrence ?

Lorsque nous avons une relation de récurrence c'est-à-dire une relation entre u_n et u_{n+1} et que nous devons montrer une relation avec u_n et n (éventuellement u_n seul)

Exemple : Soit la suite définie par $u_1=1$ et $u_{n+1}=u_n+2n+1$. Montrer que pour tout $n>0$, $u_n=n^2$.

Comment fonctionne une démonstration par récurrence ...

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, , on répondra à 2 autres questions dont leurs résolutions entrainera la résolution de la question A

Le principe de la démonstration par récurrence pour démontrer une propriété consiste à répondre à deux questions :

1. **l'initialisation :** *on vérifie que la propriété est vraie au premier rang n_0;*
2. **l'hérédité ou la propagation :** pour tout entier $n \geq n_0$, *on montre que si la propriété vraie au rang n, alors elle est vraie au rang n+1.*

On peut comparer cela à un jeu de dominos où on veut tous les faire tomber.
l'initialisation pour vérifier que le premier domino tombe, l'hérédité pour montrer que si un domino tombe alors le suivant tombera aussi. Ainsi on peut conclure que tous les dominos vont tomber

Comment rédiger une démonstration par récurrence ...

La plupart des informations se trouvent dans l'énoncé. Il suffit de les repérer et de les intégrer dans la rédaction

La méthode consiste à connaitre des phrases types qu'on complétera avec l'énoncé, par exemple :
Initialisation : on vérifie pour n= ... c'est-à-dire ...
On fait la vérification
Hérédité pour tout entier n≥... , on montre *que :*
si la propriété vraie au rang n, (hypothèse de récurrence)alors elle est vraie au rang n+1.
On démontre la consigne d'hérédité
Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, on a ...

Exemple : Soit la suite définie par $u_1=1$ et $u_{n+1}=u_n+2n+1$. Montrer que pour tout $n>0$, $u_n=n^2$.

On analyse l'énoncé : $u_1=1$ et $u_{n+1}=u_n+2n+1$(relation de récurrence). Montrer que pour tout $n>0$(permet de connaitre la valeur initiale), $u_n=n^2$(propriété à démontrer)

On peut maintenant compléter :
Initialisation : on vérifie pour n= 1*(car n>0)* c'est-à-dire que $u_1=1^2$ *(on vérifie la propriété pour n=1)*
On fait la vérification
Hérédité : pour tout entier n≥1, on montre que : si $u_n=n^2$*(la propriété de l'énoncé)*, (hypothèse de récurrence), alors $u_{n+1}=(n+1)^2$(la propriété de l'énoncé où on remplace TOUS les n par n+1) .
On démontre la consigne d'hérédité
Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, on a pour tout $n>0$, $u_n=n^2$.