Limites et asymptotes

Fiche méthode 1 : calcul de limites

Quand doit-on calculer des limites?

On calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition, donc là où la fonction n'est pas définie.

Exemple : pour la fonction inverse, $f(x) = \frac{1}{x}$. son ensemble de définition est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Il y a donc 4 limites à calculer : en $-\infty$, en 0^-, en 0^+ et en $+\infty$.

Comment calculer une limite et repérer les formes indéterminées ?

Pour calculer la limite de f(x) en A, il suffit de remplacer x par A dans f(x) et d'utiliser les tableaux du cours. On trouve soit directement une réponse soit on a une forme indéterminée, c'est-à-dire tous les réponses sont envisageables.

En général, pour lever l'indétermination, on met le terme le "plus fort" en facteur

Comment calculer les limites d'une fonction polynome en $\pm\infty$?

Pour calculer une limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynome, il suffit de calculer la limite du terme de pus haut degré

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 5x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$

Comment calculer les limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$?

Pour calculer une limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle, il suffit de calculer la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur, on simplifie ce quotient puis on détermine la limite

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 + 4x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

Comment les limites autour d'une valeur interdite ?

Si A est une valeur interdite de la fonction f, alors on devra souvent calculer la limite à gauche de A (en A^-) et la limite à droite de A (en A^+).
Dans le cas des fonctions rationnelles il sera souvent nécessaire d'étudier le signe de f autour de A

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 5x + 2}{x - 1} = -\infty$ *car* $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 5x + 2 = -2$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$

Limites et asymptotes

Fiche méthode 2 : les asymptotes

Comment savoir si une fonction admet une asymptote horizontale ?

Pour savoir si une fonction f admet une asymptote horizontale, il suffit de calculer la limite de f en $\pm\infty$. Si cette limite est finie et vaut a, alors y=a est une asymptote horizontale de f.

Exemple : pour la fonction inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc y=0 est une asymptote horizontale en $+\infty$

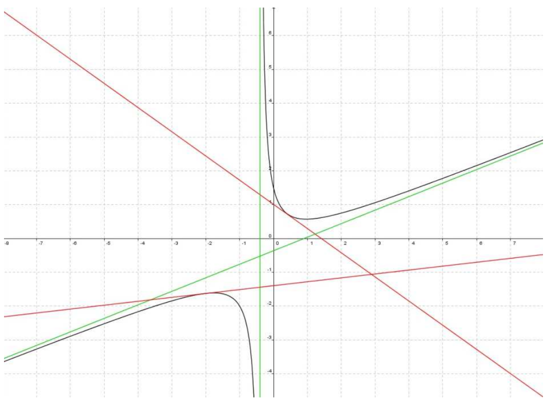
Comment savoir si une fonction admet une asymptote verticale ?

Pour savoir si une fonction f admet une asymptote verticale en a, il suffit de calculer la limite de f en a. Si cette limite vaut $\pm\infty$, alors x=a est une asymptote verticale de f

Exemple : pour la fonction inverse, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc x=0 est une asymptote verticale

Comment reconnaitre une asymptote sur un graphique ?

Sur un graphique, on reconnait les asymptotes car elles sont proches des branches infinies (en vert sur le graphique). Attention à ne pas les confondre avec les tangentes (en rouge) qui elles sont proches à un point de la courbe.



Comment savoir si une fonction admet une asymptote oblique ?

Pour savoir si une fonction f admet y=ax+b comme asymptote oblique en $\pm\infty$, il suffit de vérifier que la limite en $\pm\infty$ de [f(x)-(ax+b)] est nulle

Exemple : Soit $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x}$ admet y=x+2 comme asymptote oblique en $+\infty$ car

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$