Limites et asymptotes

Fiche méthode : limites de suites

Quand doit-on calculer des limites?

On calcule les limites des suites seulement en $+\infty$. Soit on arrive à déterminer directement la limite, soit on est en présence d'une forme indéterminée, soit la suite n'a pas de limite.

Rappel : Il y a 4 formes indéterminées (FI) : $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$

Exemple : Les suites $u_n=cos(n)$, $u_n=sin(n)$, $u_n=(-1)^n$, $u_n=(-3)^n$ n'ont pas de limite.

Comment calculer une limite d'une forme indéterminée ?

Pour calculer la limite d'une forme indéterminée, il suffit souvent de mettre le terme le plus fort en facteur.

Exemples :

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2-5\sqrt{n}+2 = \lim_{n\to+\infty} 3n^2\left(1-\frac{5\sqrt{n}}{3n^2}+\frac{2}{3n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3n^2\left(1-\frac{5}{3n\sqrt{n}}+\frac{2}{3n^2}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{3n\sqrt{n}}+\frac{2}{3n^2}\right)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n-2^n = \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty \quad car \quad \lim_{n\to+\infty} 3^n=+\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \; car \; -1<\frac{2}{3}<1$$

Si la suite est définie à partir d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle, on prend le terme de plus haut degré

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2-5n+2 = \lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-5n+2}{n^3+4n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Comment utliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes ?

Si on n'arrive pas à calculer une limite de suite, on peut essayer de comparer ou d'encadrer la suite par des suites de limites connues. On utilise souvent ces théorèmes avec cosinus, sinus ou $(-1)^n$ car on peut les encadrer par -1 et 1.

Le cours : si on a trois suites telles $u_n \le v_n \le w_n$

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (théorème de comparaison)

si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (théorème de comparaison)

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ (théorème des gendarmes)

Exemple : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\cos n$. *cosn* n'a pas de limite, encadrons *n+cosn*

Pour tout n, -1$\le cosn \le 1 \Leftrightarrow n-1 \le n+cosn \le n+1$. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$

donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\cos n = +\infty$